Санкт-Петербургский государственный университет
Кафедра математической теории микропроцессорных систем управления

Мурашко Андрей Юрьевич

Выпускная квалификационная работа бакалавра

Оптимизация и управление в сложных организационных системах

Направление 01040062
«Прикладная математика и информатика»

Заведующий кафедрой,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Зубов А.В.

Научный руководитель,
доктор физ.-мат. наук,
профессор Зубов А.В.

Рецензент,
доктор физ.-мат. наук,
доцент Михеев С.Е.

Санкт-Петербург
2016

Оглавление

Введение

Модели, как метод научного исследования способны показать различные материальные и идеальные объекты. Они используются для получения новой информации об объекте исследования в ходе его изучения. Моделью будем называть каждую систему, которая находится в определенных отношениях с оригинальным объектом таких, как - между оригиналом и моделью имеются отношения сходства, форма которого точно выражена и явно зафиксирована. Модель в процессах научного познания является аналогом изучаемого объекта. Изучение модели позволяет получать информацию об оригинале. Из этого следует, что при таком рассмотрении модель одновременно является и объектом изучения, и экспериментальным средством для познания окружающего мира.

Данная выпускная квалификационная работа посвящена одной из проблем достоверности инженерных расчетов и компьютерных вычислений в сложных организационных системах, построенных при модельном познании и изучении окружающего мира, представленных в виде различных математических выражений, связывающих физические величины, количественно описывающие состояние этих систем. При разработке моделей для систем управления возникают такие проблемы, как:

- ограниченная точность параметров из-за опытного измерения;
- непостоянство данных параметров в ходе эксплуатации.

В работе приводится описание общеизвестных теорем с наглядным представлением их несправедливости в некоторых ситуациях.

Актуальность данной темы заключается в том, что при разработке систем управления часто не уделяется внимание тому, что моделируемые системы не являются идеальными. В среде неидеальных знаковых моделей возможно малое отклонение параметров от заданного значения. Из-за этого фактора происходят как поломки мелкого оборудования, так и катастрофы мирового масштаба. В работе приводятся примеры отклонения коэффициентов и методы анализа корректности решения.

Постановка задачи

При разработке систем управления реальных организационных систем нужно учитывать, что истинные, неизвестные значения параметров, коэффициентов объекта, а, следовательно, и значения параметров и коэффициентов его математической модели всегда могут колебаться внутри некоторого интервала. При любом построении математической модели нужно учитывать этот факт и следить, чтобы при эквивалентных преобразованиях не поменялся характер этих колебаний.

Задачи дипломной работы:

1. Построение примера «некорректных» систем.
2. Объяснение правил стабилизации «некорректных» систем.
3. Доказательство существования корректного управления.

Обзор литературы

1. А.В. Зубов, О.А. Шабурова Управление динамическими системами

Данный материал помогает рассмотреть вопросы моделирования для управляемых динамических систем различных областей применения. При этом внимание уделяется как общесистемным особенностям моделирования, так и построению управлений, а также качественному анализу поведения динамических систем в процессе управления.

2. Обеснюк В.Ф., Кулезнева Е.П. Моделирование систем

В данной книге рассмотрены основные подходы к созданию математической модели, проектирование сложной системы. Приводятся наглядные примеры создания динамических систем.

3. Солодовиков В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Теория автоматического управления техническими системами.

В данном пособии рассматривается процесс построения оптимального управления динамическими системами.

4. Петров Ю.П., Петров Л.Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами.

Данная книга посвящена обнаруженным авторами в традиционных разделах математики – преобразовании и решении уравнений важным явлениям. Открытые явления могут изменять корректность задач, в ряде случаев приводят к серьезным ошибкам математических моделей технических устройств.

Глава 1. Системы

В современном мире человек постоянно употребляет слово «система» в совершенно разных контекстах, например:

- совокупность объектов природы (Солнечная система);
- в теории - система Платона;
- метод организации мыслительной деятельности (система счисления);
- некоторое свойство общества (политическая система, экономическая система, система оплаты труда и т. п.);
- классификация (периодическая система Д.И. Менделеева);
- как математический знак;
- завершённый метод практической деятельности (система Станиславского);
- закономерность («в действиях прослеживается система»);
- совокупность установившихся норм жизни и правил поведения, например, законодательная система или система моральных ценностей;
- и др.

Но что обозначает этот термин? Ученые из различных областей знаний приводят огромное количество определений этого слова, используемых в зависимости от контекста и сферы исследования. Основным фактором, приводящим к разности определений, является двойственность самого понятия "система" и даже противоположность: с одной стороны, оно описывает объективную сторону феноменов, с другой - является субъективной моделью реальности. К примеру, система работы процессора компьютера и система Станиславского не имеют между собой ничего общего. Из-за этого различия авторы определений предлагают как минимум два аспекта: способ определения разницы между системным объектом и несистемным (дескриптивные, описательные определения, такие как – «Система — совокупность элементов, находящихся в определённых отношениях друг с другом и со средой (Л. фон Берталанфи)») или же метод выделения системы из окружающей действительности (конструктивное определение – «Система — отражение в сознании субъекта (исследователя, наблюдателя) свойств объектов и их отношений в решении задачи исследования, познания (Ю. И. Черняк)»). Главным отличием данных подходов будет являться наличие цели существования или изучения системы со стороны ее исследователя или наблюдателя.

При описании любой системы существует ряд общих параметров (свойств):

1. Целостность – подразумевает, что «сила» связей элементов внутри системы выше, нежели чем с элементами внешней среды, системы.
2. Синергичность или системный эффект – появление у системы свойств, не возникающих у отдельных частей, элементов системы.
3. Иерархичность обозначает, что каждый элемент системы можно представить как отдельную систему, так же и саму систему можно рассматривать как элемент некоторой системы.

Системность является всеобщим свойством материи, а значит - одним из главных свойств человеческого существования, включая мышление. Только каждое действие бывает более или менее системным. Появление проблем означает недостаточную системность, решение же проблем – наоборот повышение системности.

Изучением систем занимаются научные области: системная инженерия, кибернетика, теория систем, системология, термодинамика, системный анализ, и т. д.

Если в системе есть возможность выделения ряда составляющих ее подсистем, то такую систему можно считать сложной. Таким образом, сложной можно назвать почти любую знаковую, техническую систему. Например, система управления автомобилем с огромным количеством разнообразных отдельных систем управления, таких как руль, педали, коробка передач, и другие.

Модели сложных систем разделяют на три типа:

- белый ящик (механистические модели);
- чёрный ящик (феноменологические модели);
- серый ящик (комбинация из моделей двух других типов).

Строгого определения сложной системы пока не существует, но выделяют их черты:

- «зашумленность», из-за большого числа второстепенных членов системы, выражающаяся затрудненным наблюдением за системой и ее управлением;
- в большинстве своем, отсутствие математического алгоритма;
- сложность воспроизведения эксперимента с такими же выходными параметрами;
- нестационарность, выраженная в колебании характеристик;
- невоспроизводимость экспериментов с ней.

Из этого можно сформировать такое определение сложной системы – нестационарная, зашумленная состоящая из множества подсистем, взаимодействующих составляющих, благодаря чему обретающая новые свойства, отсутствующие на подсистемном уровне.

Тогда сложной организационной системой будем называть систему, обозначающую какой-либо немеханический объект изучения, для которого возможно выделение составляющих, согласованных между собой, что приводит к появлению новых характеристик и свойств объекта, отличных от его составляющих.

Глава 2. Моделирование

2.1 Понятие модели

Любое моделирование предпринимается для того, чтобы отчетливо выявить взаимосвязи между свойствами таких реальных предметов и процессов, которые непосредственно нельзя исследовать на оригинале или в силу их крайней сложности и опасности для жизни исследователя или по причине их высокой дороговизны или недоступности.

Под моделированием в общем смысле понимают процесс построения и изучения моделей реально существующих объектов с целью исследования их свойств и дальнейшем перенесении интересующих сведений на полученную модель.

Модель – это система, изучение которой позволяет получить информацию о другой системе; абстрактное и упрощенное представление реальности, отражающее лишь необходимые для исследователя свойства изучаемого объекта.

Особенностью моделирования является то, что одним и тем же исходным системам можно сопоставить любое количество моделей с разным набором свойств. Характеристиками сложных систем являются выполняемые процессы (функции), структура, поведение во времени. При моделировании характеристик данных систем различают информационные, функциональные и поведенческие модели, связанные друг с другом.

Область применения моделей достаточно широка, однако можно выделить три основных направления применения: обучение, исследование, управление. Доказано, что при обучении передача знаний значительно облегчается при применении моделей, повышается наглядность, упрощается описание и объяснение признаков исходной системы. Для научных исследований модель – некий образ исследуемого явления, с помощью которого получают, фиксируют и упорядочивают полученную информацию, проводят экспериментальную проверку. В управлении модели необходимы для упрощения сложных и многоструктурных организационных систем.

2.2 Классификация

Математическое моделирование является процессом построения, изучения и сопоставления реальному объекту математической модели. Вид математической модели может зависеть и от самого реального объекта, и от задач исследования, необходимой точности и достоверности решения.

В последнее время наиболее эффективным методом изучения систем является **имитационное моделирование**, особенно на этапе проектирования системы, где является практически единственным доступным методом получения информации о системе. При имитационном моделировании воспроизводится алгоритм функционирования системы во времени (проведение системы). Основное же преимущество имитационного моделирования заключается в возможности решения более сложных задач.

В имитационном моделировании существует метод статических испытаний (метод Монте-Карло) и метод статистического моделирования.

Комбинированное моделирование (или аналитико-имитационное) дает возможность объединить плюсы аналитического и имитационного моделирования. Когда строится комбинированная модель, необходимо заранее разделить процесс функционирования на подпроцессы, и там, где возможно, использовать аналитические модели, а где невозможно – имитационные.

Если же в исследуемой модели отсутствует сходство с каким-либо реальным физическим процессом, применяют **информационное (кибернетическое) моделирование**. Такая модель скорее отражает процессы управления, применимые к ней, нежели сам реальный объекта, так как он, в силу «нереальности» рассматривается как «черный ящик». Для построения кибернетической модели формализуют функцию, выделенную из прототипа, и воспроизводят ее на имитационной модели. Связь между выходом и входом определяет дифференциальный оператор – передаточная функция.

Структурное моделирование является неотъемлемой частью объектно-ориентированного моделирования, оно включает в себя:

- методы сетевого моделирования;
- сочетания лингвистических методов и методов структуризации;
- структурный подход для формализации и построения структур.

Ситуационное моделирование основывается на модельной теории мышления. В рамках этой теории можно описать главные алгоритмы управления процессами принятия решений. Основой создания модели можно считать описание прототипа в виде совокупности нескольких элементов, объединенных между собой отношениями, которые отражают смысл предметной области.

Реальное моделирование представляет собой исследование реального объекта либо его части. Исследование возможно проводить как и в нормальном режиме работы объекта, так и в необходимом заданном режиме для определения нужных характеристик. Реальное моделирования является наиболее приближенным, но его возможности сильно ограничены.

При **натурном моделировании** исследование проводят на реальном объекте и обрабатывают полученные результаты на основе теории подобия. Натурное моделирование включает в себя научный эксперимент, комплексные испытания, производственный эксперимент.

2.3. Принципы и подходы к построению математических моделей

1. Адекватность

Данный принцип отражает соответствие модели исследуемой системе, если модель не соответствует целям исследования, то ее ценность незначительна.

2. Соответствие модели решаемой задаче

Построение универсальной модели практически неприменимо, т.к. значительно повышается ее сложность из-за большого количества поставленных задач. Для каждой конкретной цели исследования и задачи следует использовать отдельную модель, отражающую наиболее значимые характеристики и свойства прототипа.

3. Упрощение с сохранением существенных свойств системы.

Для успешного исследования необходимо, чтобы модель была проще прототипа, носила лишь определенный набор свойств. Этот принцип можно назвать также принципом абстрагирования.

4. Соответствие точности результатов сложности модели.

Уменьшить сложность модели можно путем изменения числа переменных, исключая несущественные, либо их объединяя. Также изменение природы переменных параметров может упростить модель, например, рассматривают переменные параметры как постоянные, а дискретные как непрерывные; нелинейную функцию заменяют на линейную, дискретную функцию распределения вероятностей заменяют на непрерывную. Добавление, исключение, модификация ограничений приводит к оптимистичному или пессимистичному решению, варьируя ограничениями можно найти граничные значения эффективности.

5. Баланс погрешностей

Принимая во внимание положение о принципе баланса, необходимо минимизировать погрешности моделирования, такие как, например, округление результатов, «почти» эквивалентные преобразования и т.п. за счет незначительного изменения начальных данных.

6. Многовариантность реализаций одного и того же элемента модели.

7. Блочное строение (принцип декомпозиции)

Для сложных систем необходимо разрабатывать целую иерархию моделей, которые различаются уровнем отображаемых операций. Можно выделить уровень всей системы, ее подсистем, управляющих объектов и др. Моделирование сложных систем происходит путем разбиения данной системы на составляющие и проектирование каждой из ее частей.

При моделировании систем большое развитие получило интерполирование промежуточных значений и аппроксимация функций из этих значений. Подробное описание приводится в [12]

Основными системами при создании математических моделей являются:

Динамическая замкнутая автономная система:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x})$$

Формула используется при изучении переходных процессов в схемотехнике. При существовании закона, зависящего во времени, используют модель динамической замкнутой системы:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \overrightarrow{f(\vec{x}, t)}$$

Если же величины изменяются по закону управления, рассматривается модель динамической управляемой системы:

$$\frac{d\vec{x}}{dt} = \vec{f}(\vec{x}, \vec{u}, t)$$

Глава 3. Управление

3.1. Оптимизация

Теория управления — наука о методах регулирования и управления различных объектов, систем и процессов, строится на основе анализа данных исходной системы. Цель теории управления – построение абстрактной модели, позволяющей найти алгоритм управления для перехода системы из стационарного состояния в нужное нам.

Оптимальное управление заключается в проектировании такой системы, которая обеспечивает для данного объекта управления управляющую последовательность воздействий, которая дает нам максимальный или минимальный критерий качества системы.

Оптимальное управление – значимый вопрос теории и техники автоматического управления. Решением его является экономия важнейших ресурсов нашей планеты[16].

Решений расчета оптимального управления системы может быть сколь угодно много, но выбрать нужно «наилучшее».

Основные этапы процесса оптимизации:

1) Определение цели управления. Необходимо выразить целевую функцию (критерий оптимизации) и найти количественный эффект любого решения.
2) Выбор модели для изучения
3) Исследование среды функционирования, влияющей на процесс управления
4) Вычисление оптимального управления
5) Проверка его эффективности

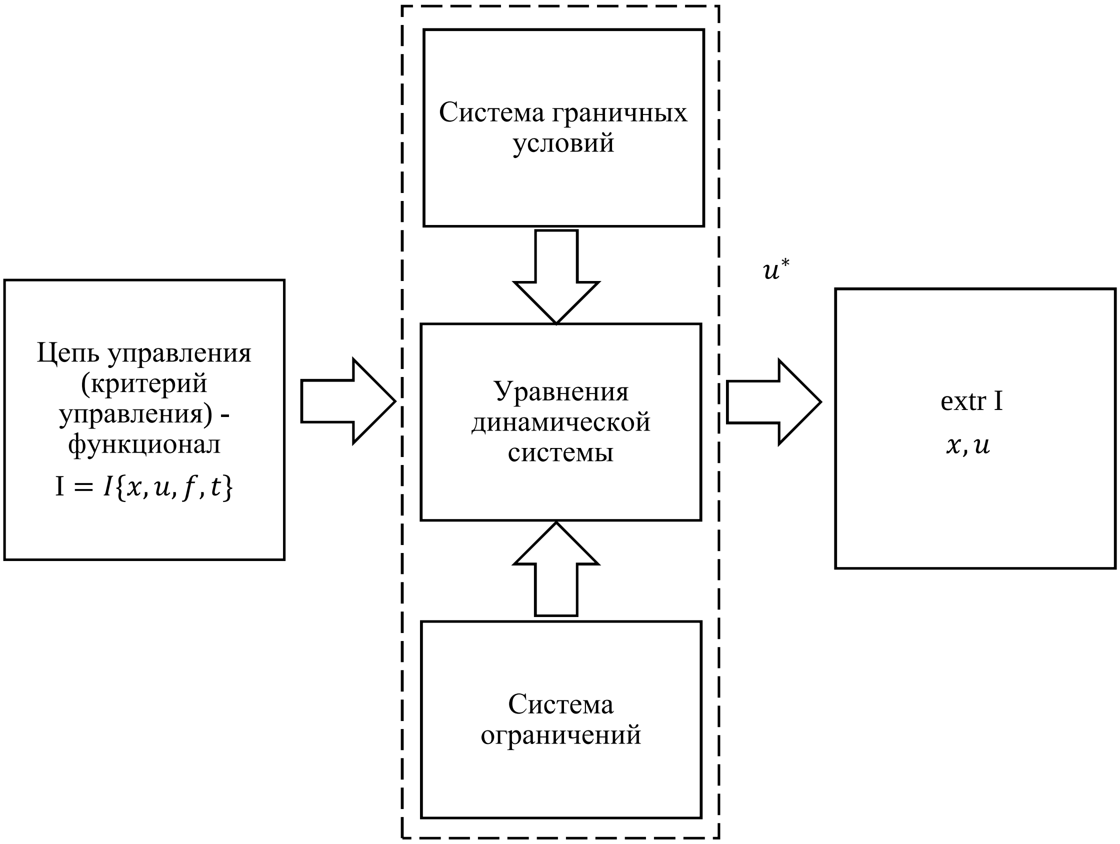

Рисунок 1 Схема задачи оптимального управления

В общем случае система управления является системой дифференциальных управлений:

$$\dot{x} = f(x, u, t);\ x(t_0) = x^0,$$

где $x(t_0) = x^0$ – граничные условия, u – вектор управления, t – время, x – вектор состояния.

$$x(t) \in X; u(t) \in U,$$

где X, U -заданные множества.

Построенную систему управления необходимо проверить на устойчивость. Устойчивая система – такая система, в которой решения, удовлетворяющие любым начальным условиям, устойчивы. Решения называются устойчивыми, если при минимальной вариации начальных условий отклонения решений от исходных являются минимальными. Существует ε – окрестность вариации решений.

Для этого существуют критерии устойчивости, рассмотрим некоторые из них:

1. Критерий Гурвица.

Если в данной системе характеристический полином является гурвицевым, то система устойчива. Полином, у которого все корни имеют отрицательные вещественные значения, является гурвицевым.

2. Критерий Ляпунова.

$$(\forall \varepsilon > 0)(\forall t_0 \epsilon I)(\exists \delta(t_0, \varepsilon) > 0)\left(\forall x_0 \epsilon B_{\delta(t_0,\varepsilon)}\right)(\forall t \geq t_0, t \epsilon J^+)$$
$$\Longrightarrow (\parallel x(t, t_0, x_0) \parallel < \varepsilon)$$

3. Метод функции Ляпунова.

Если для системы дифференциальных уравнений существует функция Ляпунова $V(x_1, x_2, \dots, x_n)$, то исследуемая система является устойчивой.

Рассмотрим общий случай построения управления [7].

Будем рассматривать уравнение движения системы n материальных точек $M_1,\dots,M_n$, где m_i – масса точки M_i r_i -ее радиус вектор, R_i – реакция связей, F_i – активная сила. Тогда каждую точку данной системы рассмотрим как свободную, ее уравнение движения будет выглядеть:

$$m_i \ddot{r}_i = F_i + R_i, \ \ i = 1, \dots, n \tag{1}$$

Представим связи рассматриваемой материальной системы в форме:

$$r_i = r_i(t, q_1, \dots, q_k), \quad i = 1, \dots, n$$

Где q_i – обобщенные координаты, единственным образом определяющие положение точек в пространстве нашей системы.

Скалярно умножая (1) на $\dfrac{\partial r_i}{\partial q_i}$ и суммируя по i=1,…,n получим:

$$\frac{d}{dt}\cdot\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_J}-\frac{\partial T}{\partial q_j}=Q_j,\quad j=1,\dots,k\ ,\qquad (2)$$

где

$$Q_j=\sum_{i=1}^{n}(\frac{\partial r_i}{\partial q_j},(F_i+R_i))$$

называется обобщенной силой.

T – кинетическая энергия материальной системы;

$\dot{q}_J$- обобщенные скорости изменения положения точек в системе.

Данную систему (2) называют системой Лагранжа 2-го рода.

Будем считать, что к рассматриваемой системе материальных точек приложены управляющие воздействия $u_1,\dots,u_r$ так, что обобщенные силы являются функциями этих управляющих воздействий

$$Q_j=Q_j(t,q_1,\dots,q_k,\dot{q}_1,\dots,\dot{q}_k,u_1,\dots,u_r),\quad j=1,\dots,k$$

Предположим, что задано некоторое программное движение и программное управление:

$$\begin{gathered}q_j=q_{jp}(t),\quad \dot{q}_j=\dot{q}_{jp}(t),\quad j=1,\dots,k\\ u_i=u_{ip}(t),\quad i=1,\dots,r\end{gathered}\qquad (3)$$

так, что данные функции удовлетворяют уравнениям (2).

Сделаем в системе (2) замену искомых функций по формулам

$$\begin{aligned}q_j&=x_j+q_{jp}(t),\quad j=1,\dots,k,\\ u_i&=u_{ip}(t)+\overline{u}_i,\quad i=1,\dots,r\end{aligned}\ .\qquad (4)$$

Подставляя функции (4) в систему (2), получим систему линейных уравнений относительно векторов

$$X = (x_1, \ldots, x_k)^*,\ U = (\bar{u}_1, \ldots, \bar{u}_r)^*.$$

Итак, пусть имеется механическая система с k степенями свободы, тогда ее движение можно описать системой дифференциальных уравнений вида, то есть перепишем систему Лагранжа 2-го рода:

$$A_0\ddot{X} + A_1\dot{X} + A_2X = G(t, X, \dot{X}) + BU + F(t, X, \dot{X}) \quad (5)$$

где $A_0, A_1, A_2, B-$ постоянные матрицы размерности $k \times k$, $X-$ вектор обобщенных координат $x_1,...,x_k$, $\dot{X}$ – вектор обобщенных скоростей $\dot{x}_1,...,\dot{x}_k$, U - вектор управлений $u_1,....,u_k$, $G-$ вектор известных функций, $F-$ вектор постоянно действующих возмущений $f_1,..., f_k$.

Предполагаем, что матрица A_0 – невырожденная и положительно определенная, матрица B также невырожденная, а матрицы A_1 и A_2 – постоянные.

Требуется найти условия, при выполнении которых можно выбрать вектор U таким образом, чтобы все движения располагались в достаточно малой окрестности точки $X = 0, \dot{X} = 0$ по истечении некоторого времени переходного процесса.

Введем в рассмотрение функцию $\varphi(y)$ вида:

$$\varphi(y) = \begin{cases} +1 \text{ при } y < 1, \\ -1 \text{ при } y > -1 \end{cases} \quad (6)$$

Где *l>0* – константа. Интервал *(-l,l)* – зона гистерезиса функции $\varphi(y)$, $y \epsilon \sigma \in (-l, l)$. Если при возрастании времени кинематическая траектория системы (5) $X(t)$ входит в область $\sigma(X,\dot{X})<l$ ($\sigma(X,\dot{X})>-l$), то величина $\varphi(\sigma,l)$ не меняется, а при выходе из области $\sigma(X,\dot{X})>-l$ ($\sigma(X,\dot{X})<l$) эта величина меняет знак на противоположный. В теории автоматического регулирования саму функциональную связь $\sigma(X,\dot{X})$ принято называть законом обратной связи, а её значение – сигналом обратной связи.

Допустимым управлением $U(t,X,\dot{X})$ называется управление вида $U=U_1+U_0$, где U_1- вектор-столбец, регулятор, определение которого происходит из соображения критерия качества и обеспечения устойчивости, в большинстве своем используется минимум среднеквадратичного критерия качества вида:

$$J = m^2 < x^2 > + < u^2 >, \tag{7}$$

где $<x^{2>}$ и $<u^2>$ являются средними квадратами переменных x и u(t)

$$< x^2 >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T x^2\,dt$$

$$< u^2 >= \lim_{T\to\infty} \frac{1}{T}\int_0^T u^2\,dt$$

m^2 – постоянное число, множитель Лагранжа.

U_0 - вектор-столбец, компоненты которого определяются по формуле:

$$U_{0_j} = \sum_{i=1}^{k} \beta_{ij}\,\varphi(\sigma_{ij)}$$

β_{ij} – константы.

3.2. Достоверность расчетов

При разработке систем управления реальных динамических систем необходимо учитывать неточность вычисления параметров. Это связано с тем, что построение модели происходит опытным путем и, следовательно, все параметры имеют конечную, ограниченную точность. Также в ходе эксплуатации следует учитывать износ оборудования, следовательно, параметры динамической системы почти никогда не остаются постоянными. Поэтому при расчете необходимо учитывать изменения коэффициентов математической модели. Они будут находиться внутри интервала $\pm\varepsilon$:

$$k_i(1-\varepsilon) \leq \overline{k_i} \leq k_i(1+\varepsilon)\ , \varepsilon > 0$$

где $\overline{k_i}$ – реальное значение параметра; k_i – значение, взятое из расчетов, ε – малое в сравнении с 1 число.

Чаще всего при построении математической модели рассматриваются только значения, полученные опытным путем, но такой подход не обеспечивает надежность расчетов.

Некорректными решениями будем называть те, сколь угодно малая вариация коэффициентов которых приводит к изменению на конечные или даже большие величины.

Первым шагом для обеспечения надежности вычисления является выделение некорректных решений, которые в большинстве своем не приводят к надежным результатам и, следовательно, не имеют никакого практического смысла. Было выявлено, что корректность решений может варьироваться при осуществлении эквивалентных (в классическом смысле) преобразованиях математических моделей. Согласно определениям, равносильные преобразования - те преобразования, которые не влияют изменения решения, но они не обязаны сохранять свойства решения неизменными, в том числе и такое свойство, как корректность. Это обстоятельство повлекло многочисленные последствия. Проверка корректности решений оказалась более трудной, чем это считалось ранее. Обнаружилась неточность ряда теорем и методов, на которые опирались при расчетах.

Например, рассмотрим систему управления частотой вращения поршней электродвигателя:

$$D = \frac{d}{dt}$$

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 - (D^2 + 2D + 1)x_2 = 0 \quad (8)$$

$$(D^2 + 4D + 4)x_1 - (D + 1)x_2 = 0 \quad (9)$$

Данная система имеет характеристический полином:

$$\Delta_{1=} \begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & -\lambda^2 - 2 - 1\lambda \\ \lambda^2 + 4\lambda + 4 & -\lambda - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2) \quad (10)$$

Корни характеристического полинома (10) равны $\lambda_1 = \lambda_2 = -1$, $\lambda_3 = -2$. Общее решение системы (8)-(9) для переменной $x_1(t)$ имеет вид:

$$x_1 t = C_1 e^{-2t} + (C_2 t + C_3)e^{-t}$$

По критерию Гурвица можно сказать об устойчивости данной системы при малых вариациях коэффициентов, так как корни характеристического полинома лежат в левой полуплоскости. Но если изменить коэффициент при $D^2 x_2$ в уравнении (8) на сколь угодно малую величину $\varepsilon < 0$, то он станет равным $1 - \varepsilon$, а система примет вид:

$$(D^3 + 4D^2 + 5D + 2)x_1 - \big((1 - \varepsilon)D^2 + 2D + 1\big)x_2 = 0 \quad (11)$$

$$(D^2 + 4D + 4)x_1 - (D + 1)x_2 = 0,$$

а его характеристический полином станет равным:

$$\Delta_2 = \begin{vmatrix} \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 & -((1-\varepsilon)\lambda^2 + 2 + 1\lambda) \\ \lambda^2 + 4\lambda + 4 & -\lambda - 1 \end{vmatrix} =$$

$$= -\varepsilon\lambda^4 + (1-4\varepsilon)\lambda^3 + (4-4\varepsilon)\lambda^2 + 5\lambda + 2 \qquad (12)$$

А общее решение для $x_1(t)$ примет вид:

$$x_1(t) = C_1 e^{-2t} + (C_2 t + C_3)e^{-t} + C_4 e^{\frac{t}{\varepsilon}}$$

График функции данного характеристического полинома (12) примет вид:

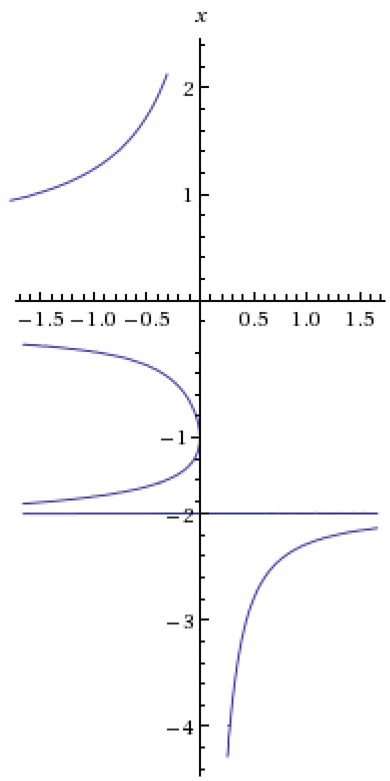

Рисунок 2 График функции характеристического полинома (12)

Как нетрудно заметить, при отклонении коэффициента на сколь угодно малую отрицательную величину получаем корень характеристического полинома (12) системы уравнений (11)-(9) в правой полуплоскости и нарушаем устойчивость системы, а при таком же отклонении на положительную величину устойчивость не изменяется.

Из данных расчетов сразу следует, что при сколь угодно малом изменении коэффициента в системе (8)-(9) устойчивость теряется, а также коренным образом изменяется характер решения $x_1(t)$. В нем появляется быстро растущий член вида $C_4 e^{\frac{t}{\varepsilon}}$ и появляется непрерывная зависимость решения от нами измененного коэффициента (для системы (8)-(9) этого нет).

При приведении системы (8)-(9) к нормальной форме с помощью эквивалентных преобразований (в классическом смысле) получаем вид:

$$\begin{gathered} \dot{x}_1 = -2x_1 - 2x_2 - x_3 \\ \dot{x}_2 = x_3 \\ \dot{x}_3 = -x_2 - 2x_3 \end{gathered} \tag{13}$$

Система (13) имеет характеристический полином Δ_3:

$$\Delta_3 = \begin{vmatrix} \lambda + 2 & 1 & 1 \\ 0 & \lambda & -1 \\ 0 & 1 & \lambda + 2 \end{vmatrix} = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda + 1)^2(\lambda + 2) \tag{14}$$

Данный полином (14) тождественно равен Δ_1 (10). Решение $x_1(t)$ системы (8)-(9) имеет тот же самый вид, как и у системы (13). Из этого мы можем сказать, что система (13) эквивалентна системе (8)-(9), однако, как и оговаривалось ранее, получили различные свойства данных решений. У системы (13) решения непрерывно зависят от всех своих коэффициентов и обладают устойчивостью при их изменениях (в чем нетрудно убедиться). У решений системы (8)-(9) как было показано такого свойства нет.

Так же можем заметить, что для системы (8)-(9) – мы можем построить функцию Ляпунова, так как это система с постоянными коэффициентами и характеристическим полиномом, обладающим корнями, находящимися в левой полуплоскости. Как мы показали, это также не будет нам гарантировать сохранение устойчивости при колебании параметров.

Раскрытием данной проблемы занимались в статьях [1],[2],[3],[4],[5],[6],[8],[9],[10],[11],[13].

Исходя из данного примера, нужно учитывать, что необходимо уделять более глубокое внимание проверке устойчивости, подходить к эквивалентным преобразованиям с большей осторожностью, следить на каждом шаге за изменением свойств устойчивости.

3.3. Методы анализа корректности решений

Для того, чтобы не изменять свойство корректности решений системы, как было показано на примере (8)-(9) используется некоторые методы:

1)В модель вида:

$$\mathrm{A}(D)x = B(D)u \tag{15}$$

где A(D), B(D) – полиномы вида

$$\mathrm{A(D)} = a_n D^n + a_{n-1} D^{n-1} + \cdots + a_0$$

$$\mathrm{B(D)} = b_n D^n + b_{n-1} D^{n-1} + \cdots + b_0,$$

где x- регулируемая переменная

u- управляющее воздействие,

включить дополнительный параметр, описывающий возмущающее воздействие на данную систему. Тогда система вида (15) примет вид:

$$\mathrm{A}(D)x = B(D)u + \varphi(t), \tag{16}$$

где $\varphi(t)$ – возмущающее воздействие.

В большинстве случаев возмущающее воздействие является не точно известным процессом, так как в большинстве своем нельзя анализировать и вычислить опытным путем все те изменения, которые происходят с течением времени. Известна, обычно, только ее статическая характеристика – спектральная плотность мощности или просто спектр процесса $\varphi(t)$. Данный спектр вычисляется с помощью обработки наблюдений за воздействиями на управление, после чего их аппроксимируют с помощью дробно-рациональной четной функции по переменной ω- частоты:

$$S_\varphi = \frac{a_p\omega^{2p} + a_{p-1}\omega^{2p-2} + \dots a_0}{b_q\omega^{2q} + b_{q-1}\omega^{2q-2} + \dots b_0} \tag{17}$$

Для вычисления коэффициентов a_i, b_i существует условие – функция (17) должна как можно меньше отличаться от полученных данных экспериментальным путем о спектре в полосе частот обсуждаемых нами. После чего должен выполняться критерий Петрова о том, что минимум критерия качества (7) не лежит на границе устойчивости:

$$p \geq m + q - 1$$

m – степень полинома B(D) в уравнении (16), p и q -степени числителя и знаменателя уравнения (17).

С помощью этого мы получаем полную картину устойчивости математической модели. Полные рассуждения приведены в [14],[15]

2)Из-за малой распространенности и известности данного критерия при поиске управления вводят критерий качества вида:

$$J = m^2 < x^2 > + < u^2 > + \lambda_1 < \left[u^{(1)}\right]^2 > \ldots \lambda_k < \left[u^{(k)}\right]^2 >,$$

в котором первые два члена правой части соответствуют критерию качества (7) и имеют четкий физический смысл, остальные же вводятся для сохранения устойчивости при вариации параметров. При увеличении $\lambda_1, \ldots \lambda_k$ получаем увеличение диапазона возможных отклонений, вариации параметров, поэтому происходит увеличение запаса устойчивости. Но это приводит к таким последствиям, как изменение аналитической аппроксимации спектра в диапазоне частот неизвестных нам. Следовательно, происходит изменение критерия качества управления до величины, неподходящей данной задаче. Полные рассуждения приведены в []

3) Если в (5) отсутствуют постоянно действующие возмущения ($F\big(t, X, \dot{X} = 0\big)$, то для любого $\varepsilon > 0$ существует управление U(ε) из класса допустимых, такое, что

$$\parallel X(t, t_0, X_0) \parallel < \varepsilon \quad \text{при } t \geq \tilde{T},$$

где $\tilde{T}$ зависит от начальных значений обобщенных координат и скоростей. Кроме того, существует управление U_ε , обладающее нужными нам свойствами, для которого зона гистерезиса удовлетворяет $l \leq a\varepsilon$, где a-константа >0.

Проведем доказательство, базируясь на приведенный выше пример (8)-(9) в общем виде. С помощью эквивалентных преобразований приведем (8)-(9) к нормальной форме.

$$\dot{Y} = AY$$

Путем дифференцирования исходной системы получим размерность вектора-столбца $\dot{Y} = 6$, A размерности (6×6).

Тогда система Лагранжа 2-го рода будет иметь вид:

$$A_1\dot{Y} + A_2Y = BU$$

где $\mathrm{A}_1 = E, A_2 = -A$

Выберем управления в форме

$$U = B^{-1}\left(C\dot{Y} + A_2Y + U_0\right) \qquad (18)$$

где C и U_0 будут выбраны в дальнейшем.

При подстановке (18) в (5) получаем:

$$(A_1 - C)\dot{Y} = U_0$$

Выберем C так, чтобы D была диагональной матрицей $(\mathrm{c}_1, \dots, \mathrm{c}_k)$, где $\mathrm{c}_i > 0, i = 1, \dots, k,$ тогда в силу того, что A_1- единичная матрица, C – диагональная матрица с элементами c_i.

Тогда, согласно (6)

$$u_{0_i} = c_i\dot{y} \qquad (19)$$

Следовательно,

$$u_{0_i} = c_i\varphi(y_i) \qquad (20)$$

По определению $\varphi(y_i)$ видно, что u_{0_i} войдет в интервал $(-l_i, l_i)$ и будет совершать там периодические колебания.

Возьмем $T = \max t_i$, $i = 1, \dots, k$. При $t \geq T$ все координаты y_i войдут в свои зоны гистерезиса, поэтому любое решение (19) будет ограничено $|y_i| < l_i$. Оценим полученное выражение (20) по (y_i).

Путем выбора l_i для $\varphi(y_i)$ и $с_i$ мы можем сделать нашу функцию y_i меньше заданного числа ε , тогда $|y_i(t)| < \varepsilon$ при $t \geq T$.

Взяв $\| X(t) \| = \sqrt{\sum_{i=1}^{k} x_i^2(t)}$, можем говорить, что $\| X(t, t_0, x_0) \| < \varepsilon$ при $t \geq T$.

Методы поиска корректного управления далеко не полностью разработаны и приведены к оптимальным, они находятся в условиях доработки и изменения, каждый автор и статья вносят в них новую дополнительную информацию. При создании математической модели нужно всегда отслеживать изменения свойств при эквивалентных преобразованиях, учитывать неполноту теории устойчивости, понимать, что введенные критерии не всегда корректны. В противном случае, построенное нами управление некоторым объектом будет неработоспособно, некорректно, из-за этого могут произойти аварии и катастрофы. Нельзя пренебрегать показанными выводами.

Выводы

Проведенное исследование показывает, что влияние бесконечно малых возмущений приводит к потере устойчивости. Критерии устойчивости являются не всегда верными. Был выявлен класс «некорректных» систем. Это явление чаще всего не замечается. Даже «некорректную» систему можно сделать корректной. Существуют методы по реализации этого.

Заключение

В ходе выполнения данной выпускной квалификационной работы были исследованы принципы построения математических моделей, построение управляющих воздействий, некорректные системы. Было показано влияние эквивалентных преобразований на устойчивость системы, неточность критериев устойчивости. Был построен пример, демонстрирующий, что внесение бесконечно малых возмущений в работу системы приводит к потере устойчивости. Были исследованы методы анализа данной «некорректности». Было доказано на примере, что, не смотря на это, возможно построение устойчивого управления.

Список литературы

1. Авдеева М.Б., Зубов А.В., Зубова О.А., Петрова В.А. Устойчивость и оптимальность управляемых систем // Системы. Методы. Технологии, ФГБОУ «Братский государственный университет», № 3(11), С. 92-94, 2011.

2. Бондаренко Л.А., Коляда Л.Г., Масицева А.А., Пупышева Г.И. Системы с инвариантными многообразиями // XII международная научно-практическая конференция: Инновации и опыт, г. Екатеринбург, Т. 2, С. 34-39, 2015.

3. Бондаренко Л.А., Зубов А.В., Мурашко А.Ю. Оптимизация и управление в сложных организационных системах // Сборник научных статей по итогам международной научно-практической конференции, октябрь 2015, с.14-18.

4. Зубов А.В., Бондаренко Л.А., Ужегов Н.С. Критерии линейной независимости скалярных и векторных функций // Научно-технический вестник Поволжья, № 2, С. 24-28, 2014.

5. Зубов А.И., Зубов В.И., Орлов В.Б. Новый метод исследования устойчивости // Научно-технический вестник Поволжья. Казань, № 5, С.33-25, 2013.

6. Зубова А.Ф., Коляда Л.Г., Щенников В.Н., Учватова Н.Н. Метод приближенного построения оптимального управления // Научно-технический вестник Поволжья. Казань, № 5, С.36-39, 2013.

7. Зубов А.В, Шабурова О.А. Управление динамическими системами. Спб: НИИ Химии СПбГУ, 2005. 83 с.

8. Кирпичникова Е.С., Кирпичников С.Н., Бондаренко Л.А. Об устойчивости линейных периодических гамильтоновых систем при наличии

негамильтоновых возмущений // Прикладная математика и механика, Т. 59, С. 9, 1995.

9. Коляда Л.Г., Масицева А.А., Петрова В.А. Устойчивость и оптимальность управляемых систем // X Международная научно-практическая конференция "Отечественная наука в эпоху изменений" в ежемесячном научном журнале "Национальная ассоциация ученых" — г. Екатеринбург, С. 24-28, 2015.

10. Москалева Е.В., Петров Ю.П., Орлов В.Б. Оценка надежности решений систем линейных алгебраических уравнений // Вестник СПб Университета Гражданской авиации, № 1, С. 97-102, 2010.

11. Мурашко А.Ю., Бондаренко Л.А., Зубов А.В. Вопросы достоверности инженерных расчетов и компьютерных вычислений в идеальных знаковых моделях динамических систем// Сборник научных статей по итогам международной научно-практической конференции, март 2016, с. 66-71.

12. Обеснюк В.Ф., Кулезнева Е.П. Моделирование систем. Ч.: ЮУрГУ, 2005. 83 с.

13. Орлов В.Б., Петров Ю.П. О достоверности инженерных расчетов и компьютерных вычислений // Проблемы нелинейного анализа в инженерных системах, Т. 16, № 1, С. 124-127, 2010.

14. Петров Ю.П. Синтез оптимальных систем управления при неполностью известных возмущающих силах. Л.:Издательство Ленинградского Университета, 1987. 291 с.

15. Петров Ю.П., Петров Л.Ю. Неожиданное в математике и его связь с авариями и катастрофами. СПб:БХВ-Петербург, 2005. 217 с.

16. Солодовиков В.В., Плотников В.Н., Яковлев А.В. Теория автоматического управления техническими системами. М.:МГТУ им Н.Э.Баумана, 1993. 493 с.